

垂直界面附近椭圆形夹杂对 SH 波的 散射与地震动研究

齐 辉, 丁晓浩, 张 洋

(哈尔滨工程大学 航天与建筑工程学院, 黑龙江 哈尔滨 150001)

摘 要: 利用复变函数法和 Green 函数法给出了 SH 波对垂直界面附近椭圆形夹杂散射问题的解析解答。首先, 将待求的半空间模型沿垂直边界分割为区域 I 和区域 II 两个直角域。通过保角映射的方法将区域 I 内椭圆形夹杂的外域映射为单位圆外域, 并利用镜像方法构造出两个区域内满足直角域边界条件的散射波场及适用的 Green 函数; 其次, 利用界面契合思想, 通过在界面处添加附加力系的方法建立起满足界面处位移和应力连续条件的无穷代数方程组, 并截断有限项求解; 最后, 给出了求解地表位移幅值的具体算例。结果表明, 入射波数、入射角度、夹杂位置、垂直界面以及材料参数都对地表位移幅值的分布有影响。

关 键 词: SH 波; 垂直界面; 椭圆形夹杂; 保角映射; 地表位移幅值

中图分类号: TU451; O 343.1; P 315.3

文献标识码: A

文章编号: 1000—7598 (2016) 08—2151—08

Study of scattering of SH-waves by a buried elliptic inclusion near a vertical interface and ground surface vibration

QI Hui, DING Xiao-hao, ZHANG Yang

(College of Aerospace and Civil Engineering, Harbin Engineering University, Harbin, Heilongjiang 150001, China)

Abstract: The methods of complex variable function and Green's function are applied to derive analytical solutions to the scattering of SH-waves induced by a buried elliptic inclusion near a vertical interface in the elastic half space. Firstly, the analytical model to be solved is divided into two rectangular domains along the vertical interface. The conformal mapping method was used to map the outer boundary of the elliptic inclusion into a unit circle in the domain I. Moreover, in these two domains, the method of images is applied to construct scattering wave fields and an applicable Green's function satisfying boundary conditions of rectangular domains. Secondly, with the aid of interface 'conjunction' technique, infinite algebraic equations are established by adding an additional system of forces at the interface and then solved by truncation, which meets the displacement and stress continuity conditions at the interface. Finally, some specific examples are given to estimate surface displacement amplitudes. Numerical results show that incident wave, incident angle, the position of inclusion, material properties and vertical interface to some extent affect the distribution of ground surface displacement.

Keywords: SH-waves; vertical interfaces; elliptic inclusion; conformal mapping; surface displacement amplitude

1 引 言

随着地下结构在工程领域的广泛应用以及自然环境本身的复杂性, 局部隐蔽地形在工程中广泛存在。研究 SH 波对局部隐蔽地形的散射问题, 不仅具有理论价值, 而且在抗爆抗震、岩土工程、土木工程和地球物理等实际应用领域中具有非常广泛的应用前景。近几十年来, 众多学者在局部地形对

SH 波的散射领域做了大量的研究并取得了很有价值的成果^[1-11]。在直角域空间和双相介质空间内的 SH 散射问题也有部分学者展开了研究^[6-11], 但对浅埋椭圆形夹杂附近伴有垂直界面的复杂地下结构的研究尚未见到公开发表的成果。本文利用复变函数法及 Green 函数法研究了双相介质半空间垂直界面附近椭圆形夹杂对 SH 波的散射问题并给出了解析解。该问题较以往多见的浅埋结构问题最大的

收稿日期: 2014-09-09

基金项目: 黑龙江省自然科学基金 (No. A201404)。

This work was supported by the Natural Science Foundation of Heilongjiang Province of China (A201404).

第一作者简介: 齐辉, 男, 1963 年生, 博士, 教授, 博士生导师, 主要从事弹性波动理论及其应用方面的研究工作。E-mail: qihui205@sina.com

区别在于出现了垂直边界,当弹性波入射时将导致弹性波在区域 I 内产生更加复杂的散射波场,同时还有部分的弹性波折射入区域 II,这无疑加大了该问题的复杂性。但在实际工程领域中不仅存在水平界面,也普遍存在垂直界面,因此,对此问题的研究就非常有必要。为了解决垂直边界对问题求解的影响,将半空间模型沿着垂直界面分割为两个独立的 1/4 空间^[12]进行研究。利用镜像叠加原理便可构造出满足 1/4 空间边界条件的散射波场。再利用文献[9]和[11]中的界面契合思想对两个 1/4 空间在界面处进行契合,通过在垂直界面处添加附加力系的方法构造出满足界面处位移和应力连续条件的无穷代数方程组。最后给出了不同参数条件下地表位移幅值的具体算例。

2 基本理论

2.1 理论模型

图 1 所示 SH 波入射到弹性半空间垂直界面附近含有椭圆形夹杂的理论模型,入射角度为 α_0 。区域 I 的剪切弹性模量与介质密度分别为 μ_1 和 ρ_1 ; 区域 II 的剪切弹性模量与介质密度分别为 μ_2 和 ρ_2 ; 椭圆形夹杂的半长轴和半短轴长分别为 a 、 b 。建立如图 1 所示坐标系,在复坐标下,相应的位置关系可以表示为 $z = z'' + d$, $z' = z'' - ih$ 。

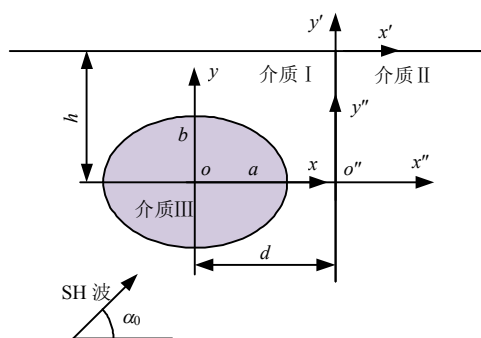


图 1 弹性半空间垂直界面及其附近椭圆形夹杂在 SH 波作用下的理论模型

Fig.1 Model of vertical interface and elliptical inclusion in the half elastic space induced by SH waves

2.2 控制方程

引入复平面 $(z, \bar{z})$, 其中 $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, 时间谐和的位移函数 W 满足 Helmholtz 方程, 可表达为

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{1}{4} k^2 W = 0 \quad (1)$$

式中: $k = \omega / c_s$ 为入射波数, ω 为圆频率; $c_s = \sqrt{\mu / \rho}$ 为介质的剪切波数。

引入从复平面 $(z, \bar{z})$ 到复平面 $(\zeta, \bar{\zeta})$ 的映射函数:

$$z = \omega(\zeta) = R \left(\zeta + \frac{m}{\zeta} \right), \quad \zeta = R e^{i\theta} \quad (2)$$

式中: $R = (a + b) / 2$; $m = (a + b) / (a - b)$ 。

映射后控制方程和应力-应变关系在平面 $(\zeta, \bar{\zeta})$ 上具有如下形式:

$$\frac{1}{\omega'(\zeta) \overline{\omega'(\zeta)}} \frac{\partial^2 W}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} + \frac{1}{4} k^2 W = 0 \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{rz} &= \frac{\mu}{R |\omega'(\zeta)|} \left(\eta \frac{\partial W}{\partial \zeta} + \bar{\eta} \frac{\partial W}{\partial \bar{\zeta}} \right) \\ \tau_{\theta z} &= \frac{i\mu}{R |\omega'(\zeta)|} \left(\eta \frac{\partial W}{\partial \zeta} - \bar{\eta} \frac{\partial W}{\partial \bar{\zeta}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

3 入射波、反射波、折射波、散射波与驻波

在复平面 $(\zeta, \bar{\zeta})$ 上, 采用镜像叠加原理, 将半空间问题转化为全空间问题进行解答, 则 SH 波的位移表达式为

$$W^{(i,e)} = W_0 \exp \left\{ \frac{ik_1}{2} [(\omega(\zeta) - ih)e^{-i\alpha_0} + (\overline{\omega(\zeta)} + ih)e^{i\alpha_0} + (\omega(\zeta) - ih - 2d)e^{-i\gamma_0} + (\overline{\omega(\zeta)} + ih - 2d)e^{i\gamma_0}] \right\} \quad (5)$$

$$W^{(r,e)} = W_1 \exp \left\{ \frac{ik_1}{2} [(\omega(\zeta) - ih)e^{-i\alpha_1} + (\overline{\omega(\zeta)} + ih)e^{i\alpha_1} + (\omega(\zeta) - ih - 2d)e^{-i\gamma_1} + (\overline{\omega(\zeta)} + ih - 2d)e^{i\gamma_1}] \right\} \quad (6)$$

$$W^{(f,e)} = W_2 \exp \left\{ \frac{ik_2}{2} [(\omega(\zeta) - ih)e^{-i\alpha_2} + (\overline{\omega(\zeta)} + ih)e^{i\alpha_2} + (\omega(\zeta) - ih - 2d)e^{-i\gamma_2} + (\overline{\omega(\zeta)} + ih - 2d)e^{i\gamma_2}] \right\} \quad (7)$$

式中: $\gamma_0 = \pi - \alpha_0$; α_1 、 α_2 分别为垂直界面处的反射角度和折射角度, $\alpha_1 = -\alpha_0$; $\gamma_1 = \pi - \alpha_1$; $\gamma_2 = \pi - \alpha_2$ 。 W_0 为入射波位移幅值, W_1 和 W_2 分别为反射波和折射波位移幅值。相应的应力表达式将式(5)~(7)代入式(4)即可求得。

入射 SH 波作用下, 根据镜像思想构造出区域 I 内椭圆夹杂产生的满足垂直和水平边界应力自由条件的散射波可表达为

$$W^{(s)}(\zeta, \bar{\zeta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \sum_{j=1}^4 S_n^{(j)} \quad (8)$$

上述方程为弱奇异性的第 1 类 Fredholm 方程组。本文采用弱奇异积分方程组直接离散法。考虑到散射波的衰减性质,在保证精度的情况下通过截断有限项的方法将上述积分方程组转变为有限线性代数方程组,通过求解即可得到离散点上附加的外力系 $f_1(r_0'', \theta_0'')$ 和 $f_2(r_0'', \theta_0'')$ 的值。

6 地表位移幅值

求解位移幅值在工程领域具有十分重要的实际意义。地表位移表达式在 $x' < 0$ 区域内可以写为

$$W^{(I)} = W^{(r1)} + \int_0^h f_1(r_0'', \beta_2) G_1(r', \theta'; r_0'', \beta_2) dr_0'' + \int_0^\infty f_1(r_0'', \beta_1) G_1(r', \theta'; r_0'', \beta_1) dr_0'' \quad (21)$$

其中, $W^{(r1)} = W^{(i,e)} + W^{(r,e)} + W^{(s)}$ 。

在 $x' > 0$ 区域内可以写为

$$W^{(II)} = W^{(r2)} - \int_0^h f_2(r_0'', \beta_2) G_2(r', \theta'; r_0'', \beta_2) dr_0'' - \int_0^\infty f_2(r_0'', \beta_1) G_2(r', \theta'; r_0'', \beta_1) dr_0'' \quad (22)$$

其中, $W^{(r2)} = W^{(f,e)}$ 。

位移表达式也可以写为

$$W = |W| e^{-i(\omega t - \varphi)} \quad (23)$$

式中: $|W|$ 为位移幅值; $\varphi = \tan^{-1} [\text{Im} W / \text{Re} W]$, 为 ω 的相位。

同时,入射波数 $k_1 a$ 也可以写为

$$k_1 a = \frac{2\pi a}{\lambda} \quad (24)$$

式中: λ 为入射波长。

用 η 表示入射波数,其表达式为

$$\eta = \frac{2a}{\lambda} \quad (25)$$

7 具体算例

根据上述理论推导,计算了 SH 波入射到含有垂直界面和椭圆形夹杂的弹性半空间内时的地表位移幅值,讨论了入射波数、入射角度、夹杂位置等参数对地表位移幅值的影响,取无量纲参数 $\mu_1^* = \mu_2 / \mu_1$, $\mu_2^* = \mu_3 / \mu_1$, $k_1^* = k_2 / k_1$, $k_2^* = k_3 / k_1$ 。

(1) 图 3 给出了当 SH 波水平入射到半空间时,地表位移幅值 $|W|$ 随入射波数 η 的变化规律。取无量纲参数 $\mu_1^* = 1.0$, $h/a = 3.0$, $d/a = 1.5$, $b/a = 0.8$ 。可以看出,低频入射时即在准静态情况下,含有夹杂一侧地表位移幅值变化具有周期性,且最大值几乎相等。随着入射频率的增加,地表位移幅值在垂直界面处的位移幅值变化比较明显且震荡频

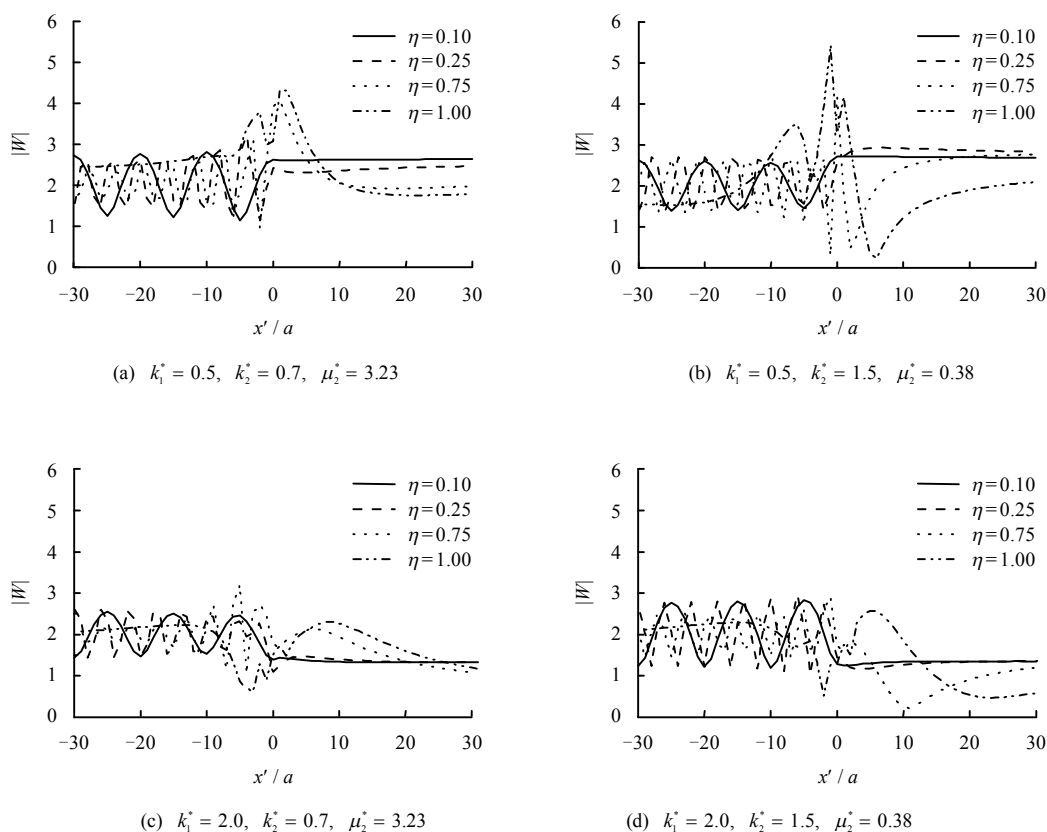
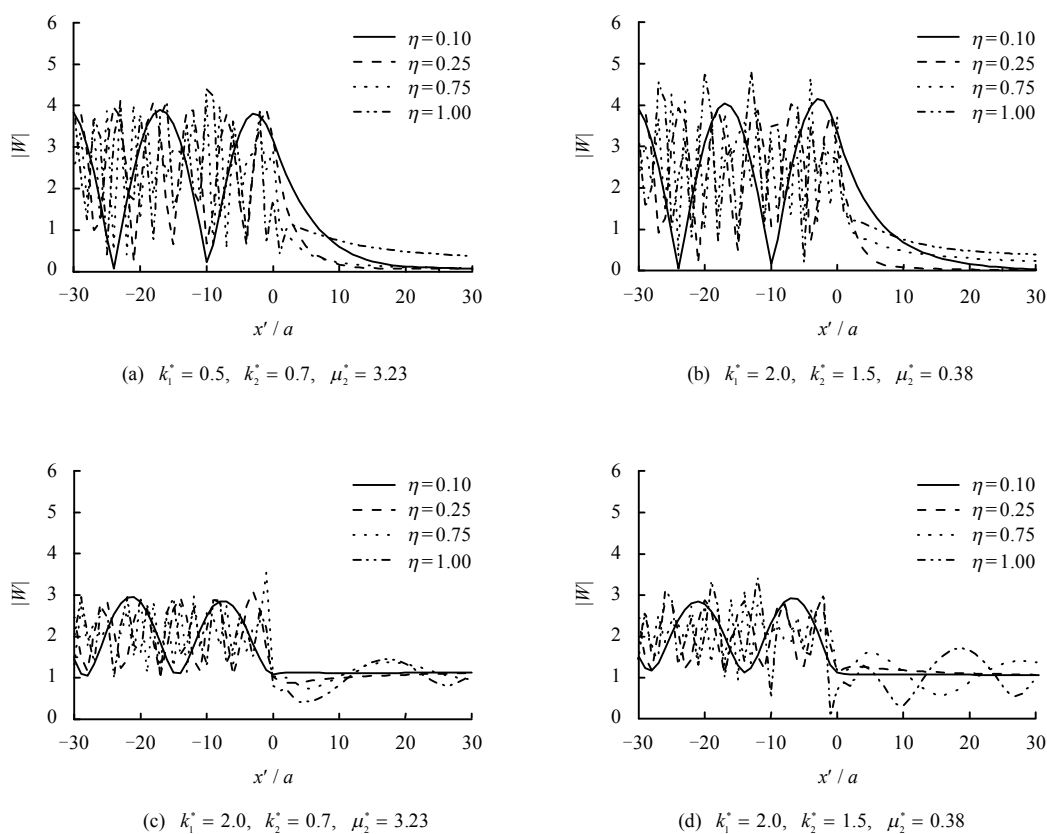
率增加。对比界面两侧位移幅值的变化情况,在含有夹杂一侧,位移幅值呈现剧烈的震荡性变化,而在不含有夹杂一侧,位移幅值缓慢震荡且仅在距离界面较近范围内有震荡,随着与界面距离加大曲线趋于平稳。同时,通过对比可以发现,介质的相对软硬对地表位移幅值影响很大,对比图 3(a)和 3(c)、3(b)和 3(d)可以看出,介质 I 较介质 II 软时,地表位移幅最大值 $|W| = 5.43$,比介质 I 较硬时的最大值增大约 80%。

(2) 图 4 给出了当 SH 波斜入射时 ($\alpha_0 = 45^\circ$),地表位移幅值 $|W|$ 随入射波数 η 的变化规律。取无量纲参数 $\mu_1^* = 1.0$, $h/a = 3.0$, $d/a = 1.5$, $b/a = 0.8$ 。由图 4(a)和 4(b)可以看出,由于弹性波由较软介质向较硬介质传播,导致在界面处折射到介质 II 中的波场较少且反射较多能量,最终使地表位移幅值在垂直界面右侧衰减较快。由图 4(c)和 4(d)可以看出,弹性波由较硬介质向较软介质传播,地表位移幅值在界面右侧呈现缓慢波动并逐渐到平稳的状态。但对比图 4(a)和 4(c),当介质 I 较软时的地表位移最大 $|W| = 4.50$,约为介质 I 较硬时最大幅值的 1.2 倍。同时,当入射波斜入射时,半空间地表位移幅值大小与水平入射时相应位移幅值大小不同,由此也说明了入射角度对地表位移幅值分布有影响。

(3) 图 5 给出了 SH 波水平入射时,地表位移幅值 $|W|$ 随距离 d/a 的变化分布情况。取无量纲参数 $\mu_1^* = 1.0$, $k_1^* = 2.0$, $\mu_2^* = 0.38$, $k_2^* = 1.5$, $h/a = 3.0$, $b/a = 0.8$ 。可以看出,低频入射时,地表位移幅值随距离 d/a 的增加无明显变化。随着入射波数的增加,地表位移幅值震荡变得剧烈,尤其是界面附近,最大值 $|W| = 4.0$ 。由此说明,椭圆形夹杂与垂直界面之间的距离对地表位移幅值的分布情况有影响。

(4) 图 6 给出了当 SH 波水平入射时,地表位移幅值 $|W|$ 随距离 h/a 的变化分布情况。取无量纲参数 $\mu_1^* = 1.0$, $k_1^* = 2.0$, $\mu_2^* = 0.38$, $k_2^* = 1.5$, $d/a = 3.0$, $b/a = 0.8$ 。可以看出,随着入射频率的增加,夹杂到地表距离 $h/a = 1.5$ 时,地表位移幅值变化最为剧烈。其主要原因是由垂直界面与自由表面影响的结果,当夹杂远离自由表面时,其上方地表位移幅值也会随之降低。总的来看,夹杂到自由表面距离越近,地表位移幅值受的影响越大。

(5) 图 7 给出了 SH 波水平入射时,界面正上方地表位移幅值 $|W|$ 随距离 d/a 的变化情况。取无量纲参数 $\mu_1^* = 1.0$, $k_1^* = 2.0$, $\mu_2^* = 0.38$, $k_2^* = 1.5$, $h/a = 3.0$, $b/a = 0.8$ 。可以看出,在入射波数 $\eta = 0.1$

图 3 SH 波水平入射时 $|W|$ 随 η 的变化情况Fig.3 Variations of $|W|$ with η disturbed by SH waves horizontally图 4 SH 波斜入射时 $|W|$ 随 η 的变化情况Fig.4 Variations of $|W|$ with η disturbed by SH waves obliquely

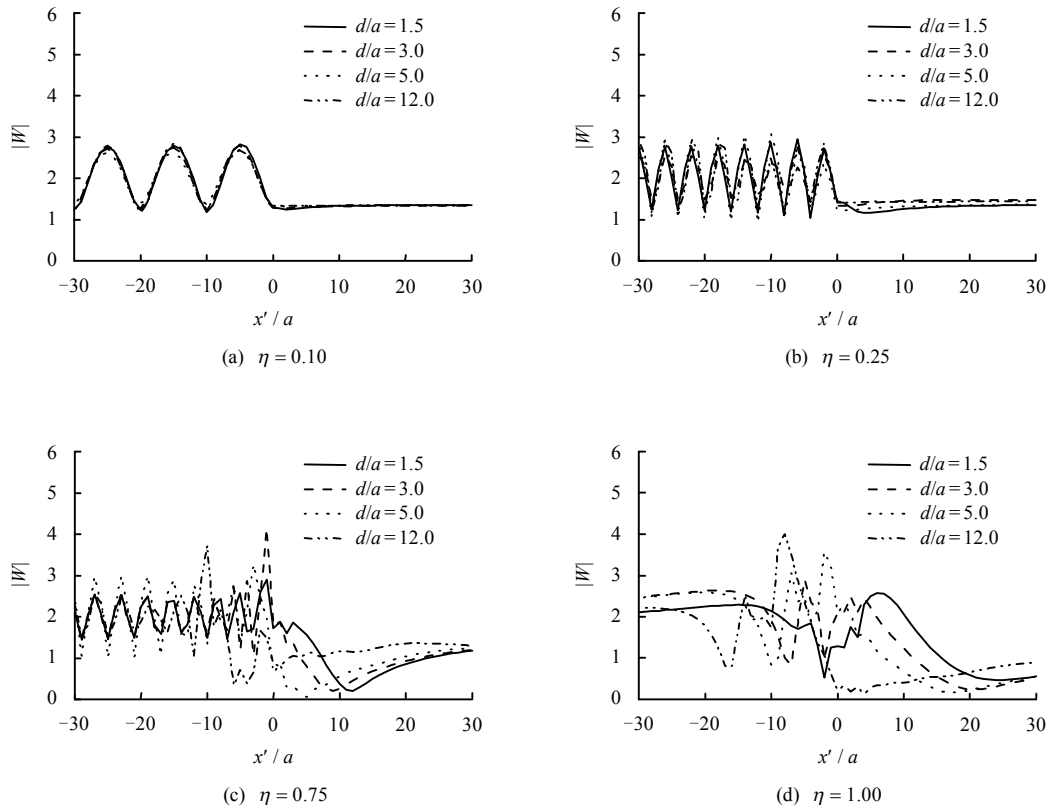


图5 SH波水平入射时 $|W|$ 随 d/a 的变化情况
Fig.5 Variations of $|W|$ with d/a disturbed by SH waves horizontally

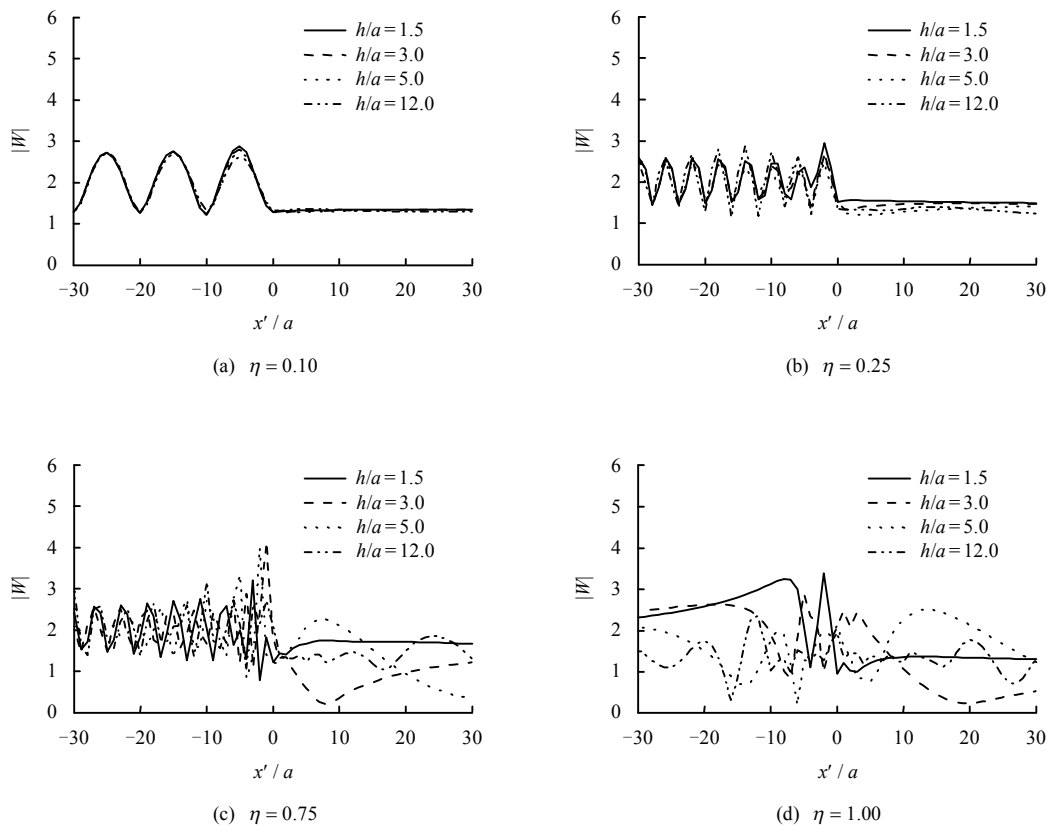
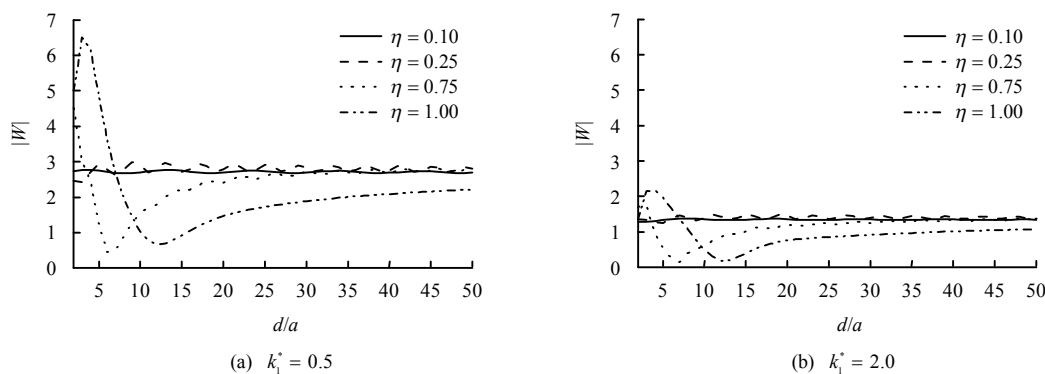


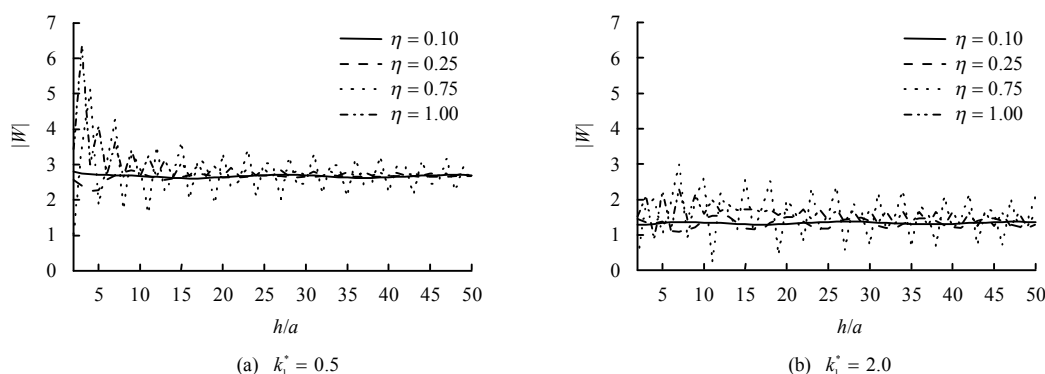
图6 SH波水平入射时 $|W|$ 随 h/a 的变化情况
Fig.6 Variations of $|W|$ with h/a disturbed by SH waves horizontally

图7 SH波水平入射时界面上方 $|W|$ 随 d/a 的变化情况Fig.7 Variations of $|W|$ above the vertical interface with d/a disturbed by SH waves horizontally

在时, 地表位移幅值振动幅度很小, 随着入射波数的增加波动幅度增大, 最大值 $|W| = 6.50$ 出现在夹杂距垂直界面较近且介质 I 较介质 II 软时, 但随着夹杂距垂直界面的距离加大, 地表位移幅值的变化趋于稳定。

(6) 图 8 给出了 SH 波水平入射时, 界面正上方地表位移幅值 $|W|$ 随距离 h/a 的变化情况。取无

量纲参数 $\mu_1^* = 1.0$, $k_1^* = 2.0$, $\mu_2^* = 0.38$, $k_2^* = 1.5$, $d/a = 3.0$, $b/a = 0.8$ 。可以看出, 在在 SH 波低频入射时, 地表位移幅值随 h/a 的变化基本保持不变, 当入射频率增大时, 位移幅值随距离 h/a 增大呈波动性变化, 当 $h/a \geq 20.0$ 时, 地表位移幅值趋于稳定, 说明当夹杂距自由表面距离较远时, 其对地表位移幅值的影响几乎可以忽略不计。

图8 SH波水平入射时界面上方 $|W|$ 随 h/a 的变化情况Fig.8 Variations of $|W|$ above the vertical interface with h/a disturbed by SH waves horizontally

8 结 论

(1) 从计算结果可以看出, 入射波数、入射角度、夹杂位置、垂直界面以及材料参数都会对地表位移幅值产生影响。其中垂直界面对地表位移幅值的影响较大, 最不利情况发生在椭圆形夹杂距水平自由表面和垂直界面距离均较近且介质 I 较介质 II 软时, 此时地表位移幅值最大, 在实际工程中若遇到此种情况应加以重视。

(2) 界两侧地表位移幅值的分布具有显著的差异性, SH 波入射一侧的地表位移幅值较界面另一侧波动更加剧烈且数值较大。

(3) 本文所用方法还可用以计算其他介质参数

组合及基体内含有其他形状夹杂物时地表位移幅值的分布情况。

参 考 文 献

- [1] WONG H L, TRIFUNAC M D. Surface motion of a semi-elliptical alluvial valley for incident plane SH waves[J]. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 1974, 64(5): 1389—1403.
- [2] LEE V W, MANOOGIAN M E. Surface motion above an arbitrary shape underground cavity for incident SH wave[J]. *European Earthquake Engineering*, 1995, 8(1): 3—11.
- [3] 刘殿魁, 陈志刚. 椭圆孔边裂纹对 SH 波的散射及其动

- 应力强度因子[J]. 应用数学和力学, 2004, 25(9): 958—965.
- LIU Dian-kui, CHEN Zhi-gang. Scattering of SH-wave by cracks originating at elliptic hole and dynamic stress intensity factor[J]. **Applied Mathematics and Mechanics**, 2004, 25(9): 958—965.
- [4] 韩峰, 王光政, 陈翰. SH 波对多个凸起与凹陷相连地形的散射问题研究[J]. 应用数学和力学, 2013, 34(4): 355—363.
- HAN Feng, WANG Guang-zheng, CHEN Han. Research on scattering of SH waves on multiple hills and canyons[J]. **Applied Mathematics and Mechanics**, 2013, 34(4): 355—363.
- [5] 杨在林, 许华南, 黑宝平. SH 波上方垂直入射时界面附近椭圆夹杂与裂纹的动态响应[J]. 岩土力学, 2013, 34(8): 2378—2384.
- YANG Zai-lin, XU Hua-nan, HEI Bao-ping. Dynamic response of elliptical inclusion and crack near interface under vertically incident SH-wave from above[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2013, 34(8): 2378—2384.
- [6] 史文谱, 陈瑞平, 张春萍. 直角平面内弹性圆夹杂对入射平面 SH 波的散射[J]. 应用力学学报, 2007, 14(1): 154—161.
- SHI Wen-pu, CHEN Rui-ping, ZHANG Chun-ping. Scattering of circular inclusion in right-angle plane to incident plane SH-wave[J]. **Journal of Applied Mechanics**, 2007, 14(1): 154—161.
- [7] 史文谱, 刘殿魁, 宋永涛, 等. 直角平面内圆孔对稳态 SH 波的散射[J]. 应用数学和力学, 2006, 27(12): 1417—1423.
- SHI Wen-pu, LIU Dian-kui, SONG Yong-tao, et al. Scattering of circular cavity in right angular planar space to steady SH-wave[J]. **Applied Mathematics and Mechanics**, 2006, 27(12): 1417—1423.
- [8] 齐辉, 张根昌, 郭晶. SH 波入射半空间双相介质界面附近圆形衬砌的动力分析[J]. 固体力学学报, 2013, 34(4): 426—432.
- QI Hui, ZHANG Gen-chang, GUO Jing. Dynamic analysis of the scattering of SH-wave by circular lining near bi-material interface in half-space[J]. **Chinese Journal of Solid Mechanics**, 2013, 34(4): 426—432.
- [9] QI Hui, YANG Jie. Dynamic analysis for circular inclusion of arbitrary positions near interfacial crack impacted by SH-wave in half-space[J]. **European Journal of Mechanics /A Solids**, 2012, 36: 18—24.
- [10] QI Hui, YANG Jie, SHI Yong, et al. Dynamic analysis for circular inclusion near interfacial crack impacted by SH-wave in half space[J]. **Journal of Mechanics**, 2012, 28(1): 143—151.
- [11] 齐辉, 杨杰. SH 波入射双相介质半空间浅埋任意位置圆形夹杂的动力分析[J]. 工程力学, 2012, 29(7): 320—327.
- QI Hui, YANG Jie. Dynamic analysis for shallowly buried circular inclusions of arbitrary positions impacted by SH-wave in bi-material half space[J]. **Engineering Mechanics**, 2012, 29(7): 320—327.
- [12] 齐辉, 蔡立明, 潘向南, 等. 直角域中凸起和孔洞对 SH 波的散射与地震动[J]. 岩土力学, 2015, 36(2): 347—353.
- QI Hui, CAI Li-ming, PAN Xiang-nan, et al. Scattering and seismic ground motion of circular cavity and salient with SH wave in a quarter space[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2015, 36(2): 347—353.